Oui, les mathématiques peuvent surprendre !

par Jean-Baptiste Hiriart-Urruty
Université Paul Sabatier de Toulouse

Résumé. À l'aide de quelques exemples, du plus simple au plus compliqué, nous montrons comment des résultats mathématiques peuvent surprendre, aller contre notre intuition ou ce que semblerait indiquer le bon sens commun. Cela doit servir de motivation pour chercher à *démontrer* ce qu'on suppute, ce qu'on annonce, ce qu'on croit être vrai.

Introduction. On a coutume de dire que l'apprentissage des mathématiques a pour but d'acquérir une rigueur du raisonnement, un esprit d'argumentation et de synthèse, un savoir-faire pour une utilisation des résultats et techniques apprises, dans d'autres sciences telles que la physique, l'économie, l'informatique, etc. Cela est vrai [1]. Mais les mathématiques sont aussi *la puissance de ce qui est démontré* et qui s'impose à tous... Un collègue (du domaine de la mécanique) que j'écoutais lors d'une conférence disait qu'on pouvait tricher avec les lois de la République (à qui pensait-il ?) mais qu'on ne pouvait tricher avec les lois fondamentales de la dynamique. On peut transposer l'affirmation aux lois de l'arithmétique : 6 fois 7 fait 42, quelle que soit votre orientation politique, votre nationalité, votre statut social... Ne dit-on pas " c'est mathématique ! " lorsque veut signifier, dans une discussion, que ce qu'on annonce ne peut être contesté... Quant à l'expression familière " ce n'est pas mathématiquement fait ", si chère aux journalistes sportifs, elle montre bien que tant qu'une possibilité existe, ce n'est pas son contraire, c'est-à-dire l'impossibilité de la chose, qui doit être clamée.

Mais les résultats de calculs mathématiques confortent-ils ce que l'intuition, le bon sens, des exemples analogues, etc. semblent indiquer ? Fort heureusement oui. Lors d'une conférence où j'exposais sur les stratégies optimales à adopter dans des sports où l'on a droit à deux essais dans les mises en jeu (comme au tennis, à la pelote à cesta punta,...) (*cf.* [1]), je donnais comme exemple le cas d'un joueur de tennis disposant seulement de deux

1. A ce sujet, on écoutera ou lira avec intérêt les deux avis récents suivants :
- Le philosophe et académicien Michel Serres et Michel Polacco parlent de l'inutile,
www.francetvinfo.fr/replay-radio/le-sens-de-l-info/le-sens-de-l-info-l-inutile_2749311.html
- "Pas d'avenir sans maths" par Patrice Caine, PDG du groupe Thalès,
www.thalesgroup.com/fr/group/news/pas-davenir-sans-maths

services, l'un fort et risqué, l'autre plus faible mais plus sûr ; la modélisation probabiliste (simple) que j'avais présentée donnait, par calculs, la stratégie optimale suivante : d'abord le service fort et risqué, puis, en cas d'échec, le plus faible mais plus sûr. Cela correspondait à ce qu'une réflexion logique indiquait et je concluais, satisfait, que les calculs mathématiques confortaient ce que tout le monde pensait... Alors une main se leva dans l'auditoire et la remarque fusa : *" Mais alors... pourquoi faire des mathématiques puisque la stratégie de service évoquée découlait du bon sens et était proposée par la très grande majorité ? "*. En effet. Mais ce n'est pas toujours le cas. Dans le texte présent, nous allons montrer à l'aide d'exemples simples, allant du niveau collège à celui de l'université, comment certains résultats sont contre-intuitifs, surprenants, difficiles à admettre même... et pourtant, ils sont vrais et irréfutables.

1. La TVA, avant ou après le rabais ?

Jonathan, élève au collège, va accompagner ses parents qui vont acheter la voiture de leur rêve, la MATHIX. Visite chez le premier concessionnaire. On évoque le prix de base, hors taxe (HT), qui est S (en euros par exemple)... mais, leur dit-on, il ne faut pas oublier d'ajouter la TVA qui est de 20%, de manière à avoir le prix toutes taxes comprises (TTC). La négociation s'engage et, en fin de discussions, le vendeur est décidé à leur faire une réduction de 7%, sur le prix hors taxe précise-t-il. Comme il faut faire jouer la concurrence, Jonathan et ses parents rendent visite à un deuxième concessionnaire, bien décidés à obtenir mieux que chez le premier. Le prix de base S est le même... On évoque inévitablement la réduction de 7% sur le prix HT que leur a consentie le premier concessionnaire. Le deuxième concessionnaire assène alors un argument qui devrait emporter la décision : *" Oui mais moi, je vous fais la même réduction sur le prix TTC "*. Ah ! qui fait donc la meilleure offre, le premier ou le deuxième concessionnaire ? Posez la question autour de vous et vous verrez qu'une réponse rapide, sans réflexion certes, est : *" Le deuxième bien sûr "*.

La réponse est fausse, les deux offres sont strictement les mêmes... C'est le fait d'appliquer un rabais à une somme plus importante, dans le cas du deuxième concessionnaire, qui induit en erreur. Vérifions cela rapidement.

Pour le premier concessionnaire, le prix de vente proposé est

$$(S \times 0,93) \times 1,20\,;$$

pour le deuxième, elle est de

$$(S \times 1,20) \times 0,93.$$

Dans le deuxième cas, la réduction s'applique certes à une plus grande somme, mais dans le premier cas, la dilatation par application du taux de TVA s'applique à une plus petite somme. Bref, les propriétés de la multiplication qui sont utilisées sont à la fois l'associativité et la commutativité.

2. L'élève cycliste pressé...

Jonathan, toujours lui, a décidé d'aller au collège en vélo ; le collège est à une distance d (en km) de son domicile. Il se fixe comme objectif de faire l'aller-retour à une vitesse moyenne de 20 km/h.

Jonathan part le matin et, arrivé à son collège, son compteur - pardon une application sur son smartphone - lui indique qu'il a parcouru le trajet à une vitesse moyenne de 10 km/h. Atch ! c'est un peu lent... Question : A quelle vitesse moyenne doit-il parcourir le chemin du retour pour être sûr d'atteindre l'objectif qu'il s'est fixé ? Posez la question autour de vous et vous verrez... Premier type de réponse : 30 km/h... Non, la moyenne de 10 et de 30 est bien 20, mais ça ne marche pas comme ça pour les vitesses. Autres tentatives : 35 km/h, 40 km/h,... Enfin une réponse plus sensée : *" Il faut qu'il aille plus vite qu'à l'aller ! "*. Bien sûr, mais ça ne répond pas à la question... La réponse - et c'est en cela que le résultat est surprenant- est : c'est impossible ! Que Jonathan revienne du collège chez lui à 100 km/h, à la vitesse du son et ou à celle de la lumière, la vitesse moyenne sur l'aller-retour n'atteindra jamais 20 km/h. Vos interlocuteurs sont dubitatifs... C'est là qu'il faut avoir recours à l'argument ultime : démontrons-le !

La vitesse V, la distance parcourue D, le temps de parcours T, sont trois variables [2] liées par l'équation simple $D = V \times T$. Faisons pour notre cas un rapide et facile calcul algébrique :

- À l'aller, $d = 10\ km/h \times T_{aller}$

- Au retour, $d = V_{retour} \times T_{retour}$.

L'objectif assigné est : $2d = 20\ km/h \times (T_{aller} + T_{retour})$.

Cela conduit à $\frac{d}{V_{retour}} = 0$ ou bien $T_{retour} = 0$!... Surprenant..., surprenant aussi que le résultat ne dépende pas de la distance d entre le domicile et le collège de Jonathan. Vos interlocuteurs sont ébahis... Pour enfoncer le clou, proposons-leur un exemple, avec $d = 10$ km. L'aller-retour fait donc 20 km, et comme l'objectif visé est de parcourir cette distance à une vitesse moyenne de 20 km/h, il faudra donc faire l'aller-retour en 1 heure. Mais l'aller (de 10 km) étant parcouru à une vitesse moyenne de 10 km/h, le temps de parcours aller est déjà de 1 heure... Trop lent, trop tard, Jonathan ne rattrapera jamais son retard.

2. Ici comme ailleurs, les lettres indiquent les mesures en " l'unité qui convient " de la grandeur correspondante.

Un collègue, paisible retraité, à qui nous exposions ce petit problème nous répondit en disant : *“ Il faut voir ça d'une manière graphique, les vitesses c'est comme les pentes de droites ”.* Voici donc son explication géométrique, que l'on suggère de suivre sur la figure ci-dessous.

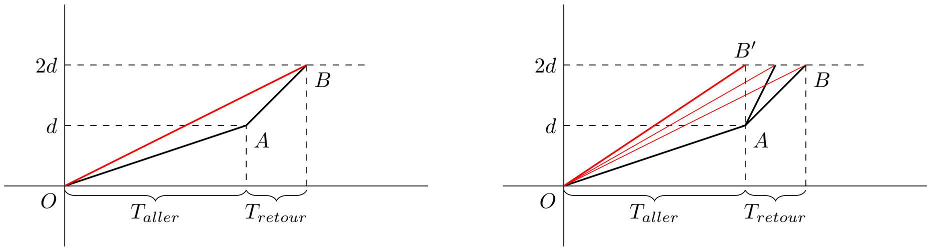

Figure 1.

En abcisse figure le temps, en ordonnée la distance parcourue. La pente (ou coefficient directeur) de la droite (OA) est V_{aller}, par exemple 10 km/h ; la relation $d = 10\ km/h \times T_{aller}$ se lit clairement sur le graphique. De même, la pente de la droite (AB) est V_{retour} et, de nouveau, $d = V_{retour} \times T_{retour}$. La durée totale du parcours est $T_{aller} + T_{retour}$ et, encore, $2d = V_{moyenne} \times (T_{aller} + T_{retour})$, où $V_{moyenne}$ désigne la vitesse moyenne sur la totalité du trajet aller-retour. Mais c'est qu'ici on voit très bien ce qu'est $V_{moyenne}$: c'est la pente de la droite (OB). Et si on veut que $V_{moyenne}$ soit 20 km/h, soit le double de la pente de (OA), il faudrait que B soit “ poussé ” en B', à la verticale de A, et donc la pente de (AB') (représentant V_{retour}) serait infinie !

Cet exemple est aussi l'occasion de faire toucher du doigt, si l'on peut dire, la notion d'asymptote,... c'est-à-dire l'inaccessible. En effet, avec les simples relations algébriques indiquées plus haut, on obtient la relation suivante entre V_{retour} et $V_{moyenne}$:

$$V_{moyenne} = \frac{20\ km/h \times V_{retour}}{10\ km/h + V_{retour}} \quad (< 20\ km/h)\,.$$

Ainsi, si V_{retour} est au maximum 40 km/h - pas si mal comme vitesse pour revenir en vélo du collège à la maison- la vitesse moyenne $V_{moyenne}$ sur l'aller-retour sera de 16 km/h.

3. Comment ça... on crée de la surface ?

Considérons un carré de 8 cm de côté, partagé en 4 morceaux comme l'indique la Figure 2(a) ci-dessous ; la superficie totale du carré est de 64 cm^2. Nous redisposons ces 4 morceaux d'une manière différente, à la manière d'un puzzle, comme cela est indiqué dans la Figure 2(b). Nous conseillons au lecteur de le faire, comme nous l'avons fait nous-même, avec une feuille de carton découpée avec des ciseaux.

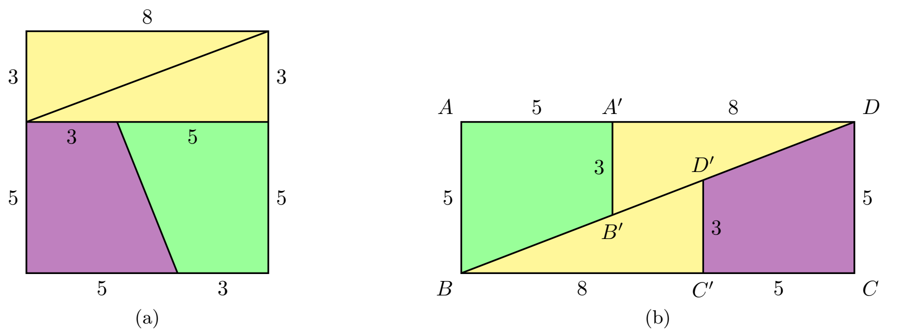

Figure 2.

Atch ! que se passe-t-il ? Nous avons à présent un rectangle de côtés 5 cm et $8 + 5 = 13$ cm, soit de superficie totale 65 cm^2. Nous aurions ainsi “ créé ” 1 cm^2 ? Très surprenant, il doit y avoir un truc... Mais quoi ? Les mathématiques sont là, sorte de règle d'esprit et du raisonnement, pour dire que cela n'est pas possible... Reste à trouver la faille dans notre construction. Et là notre bon vieux théorème de Thalès vient à la rescousse. Les deux segments concaténés $[BB']$ et $[B'D]$ ne sont pas en ligne droite... En effet, s'ils l'étaient, le théorème de Thalès appliquée aux parallèles (AB) et $(A'B')$ du triangle supposé ABD nous indiquerait que $A'B'/AB$ $(= 3/5 = 0,6)$ serait égal à DA'/DA $(= 8/13 \simeq 0,61)$... Donc, $BB'D$ n'est pas un côté du triangle ABD ! De fait, la figure 3 montre un interstice de 1 cm^2 qui s'est faufilé entre les deux lignes légèrement brisées $BB'D$ et $BD'D$. Ètonnant, non ?

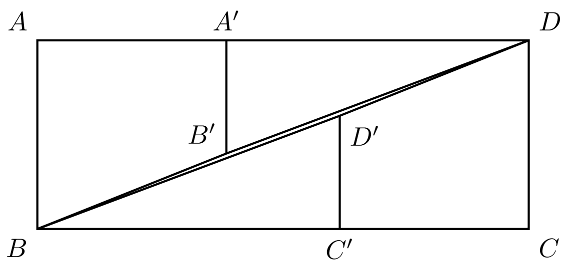

Figure 3.

4. Comment se faire embobiner par le cercle...

Le cercle, objet mathématique “ parfait ” s'il en est, peut être la source de surprises même sur des questions simples. Nous en donnons ci-dessous deux exemples.

4.1 Allongeons le rayon...

Prenons une balle de ping-pong et la Terre, toutes deux assimilées à deux sphères parfaites, l'une de rayon 2 cm, l'autre de rayon 6400 km... objets de taille très différente donc, puisque le facteur multiplicatif pour passer de l'un à l'autre est 32×10^7. Considérons une ficelle qui fait exactement le tour de ces objets, suivant un grand cercle. Nous savons, bien sûr, comment calculer la longueur de cette ficelle, elle est de 2π fois le rayon.

Considérons maintenant une ficelle qui fait le tour de ces objets en restant toujours à 1 m de la surface... Elle sera forcément plus longue. Mais pour quel objet, la balle de ping-pong ou la Terre, l'allongement sera-t-il le plus grand ? Posez la question autour de vous... et vous verrez qu'une réponse spontanée est : *" Pour la Terre bien sûr ! "*. Or, aussi surprenant que cela puisse paraître, il n'en est rien... : les deux ficelles ont été rallongées d'exactement la même longueur, de $6,282$ m environ. En effet, du périmètre d'origine $2\pi r$ on est passé au périmètre $2\pi(r + 1m)$, soit un accroissement de $2\pi m$. Etonnant, non ? Avoir donné les rayons respectifs de la balle de ping-pong et de la Terre n'a servi à rien, sinon à perturber, laissant penser qu'ils devaient intervenir dans les calculs.

4.2 Ètirons à peine la circonférence...

On reprend l'exemple de la Terre assimilée à une sphère de rayon $r = 6400$ km. Une corde bien serrée l'entoure au niveau d'un plan passant par les deux pôles, lequel coupe la sphère en deux. Cette corde est longue, plus de 40 000 km. On allonge la corde de seulement 1 mètre. On tire ensuite la corde en un point : il reste dans le plan méridien qui coupe la Terre en deux, mais est tendue de façon à décoller de la surface de la Terre au maximum. Voir la Figure $4(a)$ ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle, bien sûr). Question : De quelle hauteur h la corde décolle-t-elle ? Posez la question autour de vous et vous entendrez les réponses spontanées suivantes : *" Pratiquement rien... l'allongement de la corde ne représente que* $1/(4 \times 10^7)$ *de la longueur initiale de la corde "*, *" Très peu, de l'ordre de quelques cm... "*. Or, il n'en est rien... La réponse est surprenante, et seule une démonstration, en faisant le calcul effectif, permet de se convaincre du résultat. Le décollement h est de plus de 120 m !

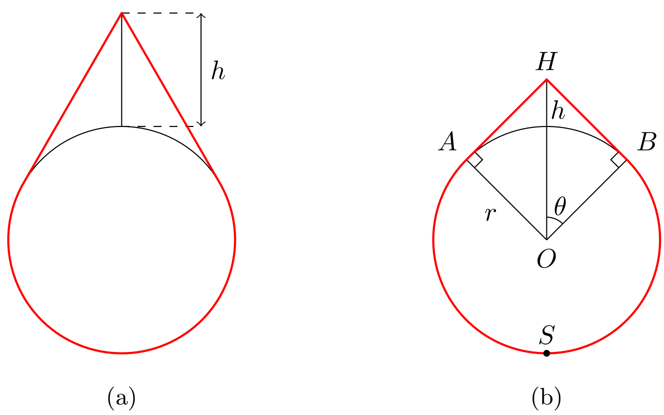

Figure 4.

Faisons les calculs précis, lesquels ne font intervenir que de simples considérations trigonométriques dans un triangle.

La figure 4(b) nous indique le calcul suivant : la longueur de la corde allongée est $AH + HB + BSA$, où BSA est la longueur de l'arc de cercle passant par le sud S. Etant donné l'angle θ provoqué par le décollement jusqu'à H (voir la figure), on a clairement :

$$\begin{aligned} AH &= HB = r\tan(\theta); \\ BSA &= 2\pi r - 2\theta r. \end{aligned}$$

Par construction,

$$AH + HB + BSA = 2\pi r + 1m,$$

et

$$h + r = \frac{r}{\cos(\theta)}.$$

On déduit des formules ci-dessus le procédé en deux étapes pour calculer h :

- résoudre l'équation $\tan(\theta) - \theta = \frac{1m}{2r}$; la solution est notée θ^* ;
- calculer $\cos(\theta^*)$, puis $h = \frac{r}{\cos(\theta^*)} - r$.

Pour l'exemple qui nous concerne, $r = 64 \times 10^5 m$. Un calcul numérique, avec Xcas en ligne par exemple, conduit à

$$\theta = 0,006165 \text{ rad et } h = 121,6447 \text{ m}.$$

On peut aussi se permettre ici des approximations “ raisonnables ” des fonctions trigonométriques et rationnelles en jeu. En effet, avec le r qui est donné, la solution θ^* de l'équation $\tan(\theta) - \theta = 1m/(2r)$ sera forcément très petite.

Il est donc licite d'utiliser les approximations polynomiales données par les développements de TAYLOR au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
\tan(\theta)-\theta &\backsimeq \frac{\theta^3}{3};\\
\cos(\theta) &\backsimeq 1-\frac{\theta^2}{2};\\
\frac{1}{\cos(\theta)} &\backsimeq 1+\frac{\theta^2}{2}.
\end{aligned}$$

Avec ce jeu d'approximations, on arrive à

$$h \backsimeq \frac{r^{1/3}}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \backsimeq 122 \text{ m}, \qquad (\mathcal{A})$$

ce qui n'est pas si mal, comparé au résultat numérique produit plus haut.

Généralisons ce qui précède. Si, au lieu de 1 m, on allonge la corde d'une longueur ℓ, une bonne approximation du décollement $h(\ell)$ est

$$h(\ell) \backsimeq \frac{r^{1/3}}{2}\left(\frac{3\ell}{2}\right)^{2/3}.$$

On voit donc que le comportement de h comme fonction de ℓ est en $\ell^{2/3}$ mais que la facteur multiplicatif, faisant intervenir $r^{1/3}$, est important. C'est la raison de notre résultat surprenant.

Conclusion

À l'issue de l'exposé de ces quelques exemples simples, que l'on pourrait multiplier, notamment dans le domaine du calcul des probabilités, on voit comment notre intuition, notre bon sens, nos réactions par habitudes ou simple analogies, peuvent être contredites par les résultats d'un calcul mathématique. Les mathématiques sont là pour ça ; n'est vrai que ce qui est démontré, et non ce qui parait intuitif ou est supputé. C'est précisément l'un des rôles de l'apprentissage mathématique que d'acquérir ce que d'autres ont appelé “ l'hygiène d'esprit d'un citoyen ”.

1. J.-B. HIRIART-URRUTY, *Stratégie optimale des mises en jeu à deux engagements.* Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP), 830-833 (1981).

Remerciements. Je remercie les lecteurs-arbitres de cette note ainsi que l'éditeur qui s'en est occupé ; leurs remarques ont permis d'améliorer la version initiale.

Les exemples présentés dans cette note n'ont pas prétention à l'originalité ; ils ont été collectés à la suite de lectures. Par exemple, je me suis aperçu, très récemment, que la question traitée au paragraphe 3 porte souvent le nom de puzzle ou paradoxe de Lewis Carroll. En fait, il remonte au moins à O. Schlömilch qui, dans un journal allemand de Maths et Physique, l'a publié en 1868 dans la rubrique "Communications plus petites" (nous l'avons vérifié). Il semble que ce paradoxe ait été retrouvé dans les papiers de Lewis Carroll après sa mort.

Un lecteur-arbitre m'a signalé que l'exemple évoqué au paragraphe 4.2 figurait dans un livre d'A. Bellos (de 2016 ; traduction française de titre *"Le cercle des problèmes incongrus"*, publiée en 2018). En fait, cet exemple, sans doute fort ancien aussi, n'y est pas traité de manière complète comme ici ; seule la formule d'approximation ($\mathcal{A}$) y est suggérée.

jbhu@math.univ-toulouse.fr
http ://www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/